... عندئذٍ نقول إن الفضاء X إيزومورفي (إيزومتري) مع الفضاء ...

مثال (١٤) :

ليكن $\mathbb{R}$ الفضاء المتري لمجموعة الأعداد الحقيقية، $\mathbb{R}^*$ مجموعة كل التوابع f التي من الشكل :

$$f(x)=\alpha x \quad ; \quad \alpha\in\mathbb{R}$$

و لنعرّف المسافة $d(f,g)$ بالشكل : $d(f,g)=|\alpha-\beta|$ حيث :

$$\left.\begin{array}{l} f(x)=\alpha x \\ g(x)=\beta x \end{array}\right\} ; \quad \alpha,\beta\in\mathbb{R}$$

إن d هو تابع مسافة على $\mathbb{R}^*$، وأن $\mathbb{R},\mathbb{R}^*$ متقايسين .

في الحقيقة إنّ d تابع مسافة على $\mathbb{R}^*$ لتحقق شروط المسافة :

$$(1) \quad d(f,g)=0 \Leftrightarrow |\alpha-\beta|=0 \Leftrightarrow \alpha=\beta \Leftrightarrow f=g$$

$$(2) \quad d(f,g)=|\alpha-\beta|=|\beta-\alpha|=d(g,f)$$

$$(3) \quad d(f,k)=|\alpha-\gamma|\leq|\alpha-\beta|+|\beta-\gamma|=d(f,g)+d(g,k) \ ; k\in\mathbb{R}^*$$

وحيث $\gamma\in\mathbb{R} \quad ; \quad k(x)=\gamma x$.

لنعرّف التابع التالي :

$$T:\mathbb{R}^*\longrightarrow\mathbb{R}$$

$$T(f)=\alpha \quad ; \ f(x)=\alpha x$$

إنّ هذا التطبيق غامر لأنّه من أجل أي عدد حقيقي λ مثلاً، يوجد عنصر $\varphi\in\mathbb{R}^*$ بحيث يكون $\varphi(x)=\lambda x$ وبالتالي فإنّ : $T(\varphi)=\lambda$.

كما أنّ :

$$|T(f)-T(g)|=|\alpha-\beta|=d(f,g) \quad ; f,g\in\mathbb{R}^*$$

أي أنّ T يحافظ على المسافة وبالتالي T إيزومتري بين $\mathbb{R}$ و $\mathbb{R}^*$، إذن $\mathbb{R}$ و $\mathbb{R}^*$ إيزومتريين (متقايسين) .

(٢–٦) [illegible]

تمرين محلول (١) :

برهن أنّ التطبيق A المعرّف بالعلاقة :

$$A : C[0,1] \longrightarrow C[0,1]$$

$$A(f(x)) = \frac{1}{2}\int_0^1 x\,t\,f(t)\,dt + \frac{5}{6}x$$

هو تطبيق ضاغط . ثمّ أوجد النقطة الثابتة لهذا التطبيق .

الحل :

$$d(Af_1, Af_2) = \max\left|Af_1 - Af_2\right| = \frac{1}{2}\max\left|\int_0^1 x\,t\,[f_1(t) - f_2(t)]\,dt\right|$$

$$\le \frac{1}{2}\max \int_0^1 \left[|x.t|\cdot|f_1(t) - f_2(t)|\right]$$

$$\le \frac{1}{2}\underbrace{\max_{\substack{0\le x\le 1\\ 0\le t\le 1}}|x.t|}_{1=}\cdot\max_{0\le t\le 1}|f_1(t) - f_2(t)| \le \frac{1}{2}\max_{t\in[0,1]}|f_1(t) - f_2(t)| = \frac{1}{2}d(f_1, f_2)$$

وبالتالي فإنّ A ضاغط . ومن أجل إيجاد النقطة الثابتة :

لنضع النقطة المثبّتة $f_0(x) = 0$، ولنشكّل المتتالية (تذكّر خطوات برهان المبرهنة (٩)):

$$f_1(x) = Af_0(x) = \frac{5}{6}x$$

$$f_2(x) = Af_1(x) = \frac{5}{12}\int_0^1 x.t^2.dt + \frac{5}{6}x = \left(\frac{5}{6^2} + \frac{5}{6}\right)x$$

$$f_3(x) = Af_2(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{5}{6^2} + \frac{5}{6}\right)\int_0^1 x.t^2\,dt + \frac{5}{6}x = \left(\frac{5}{6^3} + \frac{5}{6^2} + \frac{5}{6}\right)x$$

....

$$f_n(x) = Af_{n-1}(x) = \frac{1}{2}\int_0^1 x.t.f_{n-1}(t).dt + \frac{5}{6}x$$

$$= 5\left(\frac{1}{6^n} + \frac{1}{6^{n-1}} + \dots\dots + \frac{1}{6^3} + \frac{1}{6^2} + \frac{1}{6}\right)x$$

....

$$= 5x\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{6}\right)^{k}$$

وبالتالي فإنّ :

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} 5x.\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{6}\right)^n = 5x\,\frac{1/6}{1-1/6} = \frac{5}{5}x = x$$

وبالتالي فإنّ النقطة الثابتة هي x لأن : $f(x) = x$

مجموع الحدود يساوي 1 وليس ... ليس 1 ... بدأ من $\frac{1}{6}$

تمرين محلول (٢) :

ليكن X فضاءً مترياً وليكن A,B تطبيقين ضاغطين في X بحيث :

$$d(Ax,Ay)\leq \alpha_A . d(x,y)$$

$$d(Bx,By)\leq \alpha_B . d(x,y)$$

برهن على أنّه إذا كان $d(Ax,By)<\varepsilon$ من أجل أي عنصر $x\in X$ فإنّ النقطتين الثابتتين للتطبيقين A و B تقعان على مسافة لا تزيد عن $\frac{\varepsilon}{1-\alpha}$ حيث :

$$\alpha=\max\{\alpha_A,\alpha_B\}<1$$

الحل :

لتكن x^* هي النقطة الثابتة للتطبيق A ولنبيّن أن النقطة الثابتة y^* للتطبيق B كنهاية للمتتالية $y_k=B^k x^*$

(في المبرهنة (٩) اخترنا نقطة مثبّتة وشكّلنا متتالية وهو ما سنتبعه الآن) .

عندئذ يكون :

$$d(x^*,y_k)\leq d(x^*,y_1)+d(y_1,y_2)+......+d(y_{k-1},y_k)$$

$$=d(x^*,Bx^*)+d(Bx^*,B^2x^*)+......+d(B^{k-1}x^*,B^kx^*)$$

$$\leq d(x^*,Bx^*)+\alpha_B d(x^*,Bx^*)+......+\alpha_B^{k-1}d(x^*,Bx^*)$$

ويكون:

$$=d(x^*,Bx^*)\left[1+\alpha_B+\alpha_B^2+......+\alpha_B^{k-1}\right]\leq\frac{d(x^*,Bx^*)}{1-\alpha_B}$$

بالانتقال إلى النهاية عندما $k\to\infty$ نجد أنّ :

$$d(x^*,y^*)\leq\frac{d(x^*,Bx^*)}{1-\alpha_B}=\frac{d(Ax^*,Bx^*)}{1-\alpha_B}<\frac{\varepsilon}{1-\alpha}$$

تمرين محلول (٣) :

لتكن المعادلة التفاضليّة :

$$\frac{dy}{dx}=f(x,y) \qquad (4)$$

مثال (٣) :

لنثبت أنّ الربع الأول من المستوي العقدي $E=\left\{ Z=x+iy \mid x>0, y>0 \right\}$

مجموعة محدبة وغير متوازنة وغير ماصة.

١- لنأخذ العنصرين $z_1, z_2 \in E$ حيث :

$$z_1 = x_1 + i y_1 \quad ; \; x_1 > 0 \,, \, y_1 > 0$$
$$z_2 = x_2 + i y_2 \quad ; \; x_2 > 0 \,, \, y_2 > 0$$

وبأخذ $\lambda, \mu \geq 0$ بحيث $\lambda + \mu = 1$ حتى تكون المجموعة E محدبة يجب إثبات:

$$\lambda z_1 + \mu z_2 \in E$$
$$\lambda z_1 + \mu z_2 = (\lambda x_1 + \mu x_2) + i(\lambda y_1 + \mu y_2)$$

* عندما $\lambda = 0$ فإن $\lambda z_1 + \mu z_2 = z_2 \in E$ أي أن E مجموعة محدبة .
* عندما $\mu = 0$ فإن $\lambda z_1 + \mu z_2 = z_1 \in E$ أي أن E مجموعة محدبة .
* أما عندما $\lambda > 0$ ولدينا $x_1 > 0 \Rightarrow \lambda x_1 > 0$ وكذلك $y_1 > 0 \Rightarrow \lambda y_1 > 0$

$$\lambda x_1 + \mu x_2 \geq \lambda x_1 > 0 \Rightarrow \lambda x_1 + \mu x_2 > 0$$
$$\lambda y_1 + \mu y_2 \geq \lambda y_1 > 0 \Rightarrow \lambda y_1 + \mu y_2 > 0$$

وبالتالي $\lambda z_1 + \mu z_2 \in E$ إذن المجموعة E محدبة.

وبالطريقة نفسها عندما $\mu > 0$.

٢- E غير متوازنة :

حتى تكون متوازنة يجب أن يكون $|\lambda| \leq 1$ و $\lambda x \in E$. لو أخذنا $\lambda = -1$ فإن $|-1| \leq 1$ وأصبح لدينا: $(-1) z_1 = -x_1 - i y_1 \notin E$ وبالتالي E غير متوازنة .

٣- غير ماصة : لأنه من أجل $z = -1 + 2i$ من الفضاء $\mathbb{C}$ فإنّه لا يوجد $\rho = \rho(z)$ $(\rho > 0)$ بحيث $|\lambda| < \rho$ ويحقق $\lambda . z \in E$.

(٣-٣) نصف النظيم (Seminorm) :

(...) : ... وعملية الجداء بعدد مستمرتان في .

مثال (٧) :

لنعرف على S مجموعة جميع المتتاليات العددية المسافة من الشكل :

$$d(x,y)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2^k}\cdot\frac{|x_k-y_k|}{1+|x_k-y_k|}\quad ;\ x=\{x_n\},\ y=\{y_n\}$$

هذه المسافة لا متغيرة الانسحاب لأن :

$$|x_k-y_k|=|x_k+z_k-y_k-z_k|=|x_k+z_k-(y_k+z_k)|$$

سنثبت أن (S,d) فضاء متري خطي :

حتى يكون (S,d) فضاءً مترياً خطياً يجب أن تكون d مع العملية الجمعية وعملية الجداء بعدد مستمرتين في (S,d).

- **شرط استمرارية الخاصة الجمعية :**

ليكن $x,y,a,b\in S$ سنثبت أن $d(x+y,a+b)<\varepsilon$ علماً أن :

$$d(x,a)+d(y,b)<\delta$$

لذلك سنثبت أن : $d(x+y,a+b)\le d(x,a)+d(y,b)$

$$\sum_{1}^{\infty}\frac{1}{2^k}\frac{|x_k+y_k-(a+b)|}{1+|x_k+y_k-(a+b)|}\le\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2^k}\left(\frac{|x_k-a|}{1+|x_k-a|}+\frac{|y_k-b|}{1+|y_k-b|}\right)$$

$$\le\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2^k}\frac{|x_k-a|}{1+|x_k-a|}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2^k}\frac{|y_k-b|}{1+|y_k-b|}$$

$$\le d(x,a)+d(y,b)$$

وبذلك نحصل على استمرار الخاصة الجمعية .

- **شرط استمرار الجداء بعدد :**

لتكن $\lambda_n\xrightarrow[n\to\infty]{}\lambda_0$ و $d(x_n,a)\xrightarrow[n\to\infty]{}0$ سنثبت أن :

$$d(\lambda_n x_n, \lambda_0 a) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

بفرض أن : $\lambda_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \lambda_0$ و $d(x_n, a) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.

من الواضح بسهولة أن : $d(x_n, a) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \Leftrightarrow d\left(x_n^{(k)}, a^k\right) < \varepsilon$

من أجل k عدد طبيعي من N : $d(\lambda_n x_n, \lambda_0 a) < \varepsilon$ ، لنأخذ المتتالية :

$$\left.\begin{array}{l} x_n^1 \to a^1 \\ x_n^2 \to a^2 \\ \cdots\cdots\cdots \\ x_n^k \to a^k \\ \vdots \quad \vdots \\ x_n \to a \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{c} x_n^{(k)} \to a^{(k)} \\ \lambda_n x_n^{(k)} \to \lambda_0 a^{(k)} \\ \Updownarrow \\ \lambda_n x_n \to \lambda_0 a \end{array}$$

يدعى هذا النوع من التقارب بـــ التقارب الإحداثي .

من هذا نجد أن : $d(\lambda_n x_n, \lambda_0 a) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.

أي تحقق خاصّة استمرارية الضرب بعدد وبالتالي الفضاء المتري (S, d) خطّي .

مثال (٨) (عن التقارب الإحداثي) :

في الفضاء $\mathbb{C}^n$ يكون محققاً :

$$x^{(1)} = \left(x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, x_3^{(1)}, \ldots, x_n^{(1)}\right)$$

$$x^{(2)} = \left(x_1^{(2)}, x_2^{(2)}, x_3^{(2)}, \ldots, x_n^{(2)}\right)$$

$$\vdots$$

$$\begin{array}{ccc} x^{(n)} & = & \left(\begin{array}{ccccc} x_1^{(n)}, & x_2^{(n)}, & x_3^{(n)}, & \ldots, & x_n^{(n)} \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & & \downarrow \end{array}\right) \\ \downarrow & & \\ x_0 & = & \left(x_1^0, \quad x_2^0, \quad x_3^0, \quad \ldots, \quad x_n^0\right) \end{array}$$

ويمكننا بسهولة إثبات بلغة ε أن :

$$x_n^{(k)} \xrightarrow[n\to\infty]{} a^{(k)} \Leftrightarrow x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} a$$

تمرين محلول (١) :

إذا كان X,Y فضاءين خطيين منظّمين، أثبت أنّ الجداء الديكارتي $X\times Y$ يشكّل فضاء خطّي ثمّ برهن تكافؤ النظائم التالية :

- $\|(x,y)\|_1 = \max\{\|x\|,\|y\|\}$
- $\|(x,y)\|_2 = \|x\|+\|y\|$
- $\|(x,y)\|_3 = \left(\|x\|^2+\|y\|^2\right)^{1/2}$

الحل :

إنّ الجداء الديكارتي X,Y يشكّل فضاءً خطيّاً لأنّه إذا عرّفنا العمليّتين التاليتين :

* $(x_1,y_1)+(x_2,y_2)=(x_1+x_2,y_1+y_2)$ $\in X\times Y$
* $\lambda.(x_1,y_1)=(\lambda.x_1,\lambda.y_1)$ $\in X\times Y$

$\forall(x_1,y_1)\,,\,(x_2,y_2)\in X\times Y \quad \& \quad \lambda\in\mathbb{C}$

فإنه يبرهن بسهولة تحقّق شروط الفضاء الخطّي (ونترك ذلك للقارئ). ولنثبت تكافؤ هذه النظائم.

$$\|(x,y)\|_1=\max\{\|x\|,\|y\|\}\le\|x\|+\|y\|=\|(x,y)\|_2 \Rightarrow$$
$$\|(x,y)\|_1\le\|(x,y)\|_2$$
$$\|(x,y)\|_2=\|x\|+\|y\|\le 2\max\{\|x\|,\|y\|\}=2\|(x,y)\|_1 \Rightarrow$$
$$\|(x,y)\|_2\le 2\|(x,y)\|_1$$

بذلك فإنّ $\|\cdot\|_1,\|\cdot\|_2$ متكافئتان .

من جديد لدينا: $\|(x,y)\|_1=\max\{\|x\|,\|y\|\}$ وبالتالي:

$$\|(x,y)\|_1^2=\max\{\|x\|^2,\|y\|^2\}\le\|x\|^2+\|y\|^2 \Rightarrow$$
$$\|(x,y)\|_1\le\sqrt{\|x\|^2+\|y\|^2}=\|(x,y)\|_3 \Rightarrow$$
$$\|(x,y)\|_1\le\|(x,y)\|_3$$

كما لدينا :

$$\|(x,y)\|_3^2=\|x\|^2+\|y\|^2\le 2\max\{\|x\|^2,\|y\|^2\}$$
$$\|(x,y)\|_3\le\sqrt{2}\max\{\|x\|,\|y\|\}=\sqrt{2}\|(x,y)\|_1 \Rightarrow$$
$$\|(x;y)\|_3\le\sqrt{2}\|(x,y)\|_1$$

وبالتالي فإنّ $\|\cdot\|_1,\|\cdot\|_3$ متكافئتان. وحسب المبرهنة (٧) النظيمان المكافئتان لثالث متكافئتان، لهذا فإن : $\|\cdot\|_2,\|\cdot\|_3$ متكافئتان، وبالتالي فإنّ النظائم الثلاثة متكافئة.

مبرهنة (٨) :